УДК 517.988.8:536.48

О НЕКОТОРЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ К ЗАМКНУТОМУ МНОЖЕСТВУ НЕТРИВИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ГИНЗБУРГА – ЛАНДАУ

А.А. ФОНАРЁВ

Статья представлена доктором технических наук, профессором Кузнецовым В.Л.

Исследуется возможность использования проекционного итерационного метода, сочетающего в себе проекционный метод и итерационный процесс, для отыскания приближений к замкнутому множеству нетривиальных обобщённых решений краевой задачи для уравнений Гинзбурга – Ландау феноменологической теории сверхпроводимости. Обобщённые решения краевой задачи для уравнений Гинзбурга – Ландау являются критическими точками функционала свободной энергии сверхпроводника.

Ключевые слова: проекционный итерационный метод, уравнения Гинзбурга – Ландау, решения.

Введение

В феноменологической теории сверхпроводимости изучается поведение сверхпроводимости во внешнем магнитном поле. Состояние сверхпроводника, занимающего объём $\bar{\Omega} \subset R^3$ (Ω – ограниченная выпуклая область в трёхмерном евклидовом пространстве R^3 с границей $\partial\Omega$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$), описывают решения уравнений Гинзбурга – Ландау феноменологической теории сверхпроводимости, имеющих тривиальное (нулевое) решение.

В [1] исследуется более общая краевая задача для уравнений Гинзбурга – Ландау, чем исследуемая в [2] соответствующая абрикосовскому смешанному состоянию краевая задача, и определяется обобщённое решение краевой задачи для уравнений Гинзбурга – Ландау феноменологической теории сверхпроводимости, являющееся критической точкой функционала сверхпроводника.

С использованием уравнений Гинзбурга – Ландау и граничных условий, определяющих их решения, в [1, с. 345–350] доказывается существование нетривиального обобщённого решения краевой задачи для уравнений Гинзбурга – Ландау.

Точная аналитическая запись решения краевой задачи для уравнений Гинзбурга – Ландау оказывается невозможной в силу существенной нелинейности уравнений Гинзбурга – Ландау. Поэтому для поиска решений краевой задачи для уравнений Гинзбурга – Ландау применимы только численные методы.

В численных методах для поиска решений краевой задачи для уравнений Гинзбурга – Ландау важное место занимают частные конкретные задачи для уравнений Гинзбурга – Ландау [3; 4]. Например, в [4] численными методами изучено влияние граничных условий на решения уравнений Гинзбурга – Ландау для тонких сверхпроводящих пластин в безвихревом пределе.

В статье, следуя [1], при построении численного метода для поиска решений краевой задачи для уравнений Гинзбурга – Ландау рассматривается общая краевая задача для уравнений Гинзбурга – Ландау.

Показывается, что приближения к замкнутому множеству нетривиальных обобщённых решений краевой задачи для уравнений Гинзбурга – Ландау можно получить с использованием проекционного итерационного метода (ПИМ), сочетающего в себе проекционный метод и итерационный процесс [5, с. 141], где это утверждается без строгого обоснования). При этом существенно используется исследование функционала свободной энергии сверхпроводника, приведённое в [1].

1. Функционал свободной энергии сверхпроводника

Пусть $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в R^3; ∇ – оператор градиента в R^3:

$$\nabla = \left(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3\right);$$

rot – оператор ротора: $rot = \left(\partial/\partial x_2 - \partial/\partial x_3, \partial/\partial x_3 - \partial/\partial x_1, \partial/\partial x_1 - \partial/\partial x_2\right)$; n – вектор нормали к $\partial\Omega$; $W_2^1(\Omega)$ – вещественное пространство С.Л. Соболева со скалярным произведением

$$\langle u,v\rangle_{W_2^1(\Omega)} = \int_\Omega \left\{uv + (\nabla u, \nabla v)\right\} dx$$

и нормой

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} = \left(\langle u,u\rangle_{W_2^1(\Omega)}\right)^{1/2}$$

для $u,v \in W_2^1(\Omega)$; E_1 – рассматриваемое над полем действительных чисел гильбертово пространство комплексных функций, вещественные и мнимые части которых являются элементами пространства $W_2^1(\Omega)$. Скалярное произведение на E_1 определяется равенством

$$\langle \psi,\varphi\rangle_{E_1} = \mathrm{Re}\int_\Omega \left\{\psi(x)\varphi^*(x) + \left(\nabla\psi(x), \nabla\varphi^*(x)\right)\right\} dx$$

для $\psi,\varphi \in E_1$. Здесь и далее $(*)$ – операция комплексного сопряжения.

Обозначим через E_2 гильбертово пространство вектор-функций $A = (A_1, A_2, A_3)$, компоненты которых принадлежат пространству $W_2^1(\Omega)$. Скалярное произведение вектор-функций $A = (A_1, A_2, A_3)$, $B = (B_1, B_2, B_3)$ на E_2 определим равенством

$$\langle A,B\rangle_{E_1} = \int_\Omega \left\{\sum_{i=1}^3 A_i B_i + \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial A_k}{\partial x_i}\frac{\partial B_k}{\partial x_i}\right\} dx.$$

Рассмотрим гильбертово пространство $E = E_1 \times E_2$, состоящее из пар (ψ, A) с $\psi \in E_1$ и $A \in E_2$. Скалярное произведение элементов (ψ, A), $(\varphi, B) \in E$ определим равенством

$$\langle u,v\rangle_E = \langle \psi,\varphi\rangle_{E_1} + \langle A,B\rangle_{E_2}.$$

При соответствующем выборе единиц измерения уравнения Гинзбурга – Ландау феноменологической теории сверхпроводимости и граничные условия, определяющие их решения $(\psi, A) \in E$, имеют вид:

$$(i\nabla - A)^2 \psi + \mu|\psi|^2 - \lambda\psi = 0; \tag{1}$$

$$-rot\, rot\, A = A|\psi|^2 + i\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right); \tag{2}$$

$$\left(n, -i\nabla\psi - A\psi\right)\Big|_{\partial\Omega} = 0; \tag{3}$$

$$rot\, A \times n\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4}$$

где λ и μ – вещественные параметры; $i = \sqrt{-1}$.

Уравнения Гинзбурга – Ландау являются уравнениями Эйлера функционала f свободной энергии сверхпроводника, который определяется на парах $u = (\psi, A) \in E$ равенством

$$f(u)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left\{\left|rot A\right|^{2}+\left|\nabla\psi-iA\psi\right|^{2}+\frac{\mu}{2}\left|\psi\right|^{4}-\lambda\left|\psi\right|^{2}\right\}dx. \tag{5}$$

Функционал f непрерывно дифференцируем по Фреше на E и

$$\begin{gathered}\left\langle\nabla f(u),v\right\rangle_{E}=\int_{\Omega}\left\{\left(rot A, rot B\right)+\left(A\left|\psi\right|^{2}+i\psi^{*}\nabla\psi-i\psi\nabla\psi^{*},B\right)\right\}dx+\\+\operatorname{Re}\int_{\Omega}\left\{\left(\nabla\psi-iA\psi,\nabla\varphi^{*}+iA\varphi^{*}\right)+\left(\mu\left|\psi\right|^{2}\psi-\lambda\psi\right)\varphi^{*}\right\}dx\end{gathered} \tag{6}$$

для $u=(\psi,A)$, $v=(\varphi,B)\in E$, где ∇f – градиент (производная Фреше) функционала f.

Критические точки функционала f на E являются решениями операторных уравнений

$$P\nabla f(u)=0,\quad Q\nabla f(u)=0\quad(u\in E), \tag{7}$$

где $P:E\to E_1$, $Q:E\to E_2$ – операторы ортогонального проектирования пространства E на E_1 и E_2 соответственно.

Операторные уравнения (7) называются в [1] уравнениями Гинзбурга – Ландау, а их решения – обобщёнными решениями краевой задачи (1)–(4). Если обобщённое решение $u=(\psi,A)$ достаточно гладкое, то пара (ψ,A) является классическим решением краевой задачи (1)–(4) для уравнений Гинзбурга – Ландау.

Обозначим через F подпространство пространства E_2, состоящее из вектор-функций $A=(A_1,A_2,A_3)$, удовлетворяющих условиям:

$$div A\equiv\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x_3}=0;\quad (A,n)\big|_{\partial\Omega}=0.$$

Пусть H – прямое произведение пространств E_1 и F. Пространство H является замкнутым подпространством пространства E. На пространстве H [1] норма $\|\cdot\|_E$ эквивалентна норме

$$\|u\|_{H}=\left(\|\psi\|_{E_1}^{2}+\|rot A\|_{L_2(\Omega)}^{2}\right)^{1/2}\quad\left(u=(\psi,A)\in H\right),$$

где

$$\|rot A\|_{L_2(\Omega)}^{2}=\int_{\Omega}\left(rot A, rot A\right)dx.$$

На пространстве H функционал (5) допускает представление

$$f(u)=\frac{1}{2}\|u\|_{H}^{2}+g(u).$$

В [1] отмечается, что: 1) из равенства (6) вытекает, что функционал g дифференцируем по Фреше на H, а его градиент $\nabla g:H\to H$ вполне непрерывен; 2) градиент ∇f функционала f на H удовлетворяет условию $(S)_{+}$, т.е. из слабой сходимости последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}\subset H$ к $u_0\in H$ и

$$\limsup_{n\to\infty}\left\langle\nabla f(u_n),u_n-u_0\right\rangle_{H}\le 0$$

($\limsup$ – верхний предел) вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n-u_0\|_{H}=0.$$

В [1, с. 349] доказано, что если $u=(\varphi, A)$ – критическая точка функционала f, рассматриваемого на H, то u – критическая точка этого функционала на E. Таким образом, задача об отыскании критических точек функционала f на E сводится к отысканию критических точек на более узком пространстве H точек.

И в [1] доказано, что функционал $f: H\to R^1$ растущий, т.е. $\lim_{\|u\|_H\to\infty} f(u)=+\infty$.

При $\lambda>0$ на вектор-функциях $(\psi,0)$, где ψ – малая ненулевая постоянная, функционал f принимает отрицательные значения, а $f(0)=0$.

Пусть $L_q(\Omega)$, $q>1$, – пространство Лебега с нормой

$$\|u\|_{L_q(\Omega)}=\left(\int_\Omega |u(x)|^q\,dx\right)^{1/q}\quad \left(u\in L_q(\Omega)\right).$$

Пространство С.Л. Соболева $W_2^1(\Omega)$ вложено в пространство Лебега $L_q(\Omega)$ с $q\le 6$, т.е. $W_2^1(\Omega)\subset L_q(\Omega)$ и оператор вложения $j: W_2^1(\Omega)\to L_q(\Omega)$, $j(u)=u$ $\left(u\in W_2^1(\Omega)\right)$, является непрерывным взаимно-однозначным отображением $W_2^1(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$. При $q<6$ пространство $W_2^1(\Omega)$ вложено в $L_q(\Omega)$ компактно, т.е. оператор j компактный.

Говоря о компактности оператора, имеем в виду преобразование оператором любого ограниченного множества в компактное множество, т.е. в такое множество, что из любой последовательности, содержащейся в множестве, можно выделить фундаментальную подпоследовательность [6]. И говоря далее о компактности последовательности, будем иметь в виду, что из любой подпоследовательности последовательности можно выделить фундаментальную подпоследовательность.

Покажем, что градиент ∇g функционала g равномерно непрерывен на ограниченных множествах пространства H. При доказательстве равномерной непрерывности оператора ∇g на ограниченных множествах пространства H ограничимся исследованием только члена

$$i\psi^*\nabla\psi-i\psi\nabla\psi^*=2\left\{(\operatorname{Im}\psi)\nabla\operatorname{Re}\psi-(\operatorname{Re}\psi)\nabla\operatorname{Im}\psi\right\}$$

в первом интеграле в равенстве (6).

Если $\psi=v+i\omega$, то

$$\left(i\psi^*\nabla\psi-i\psi\nabla\psi^*, B\right)=2\sum_{k=1}^{3}\left(\omega v_{x_k}-v\omega_{x_k}\right)B_k\,. \tag{8}$$

Рассматривая слагаемое $v\omega_{x_1}B_1$ в сумме в (8) (остальные слагаемые в сумме в (8) рассматриваются аналогично), при $u=(\psi,A)$, $\tilde u=(\tilde\psi,\tilde A)$, $v=(\varphi,B)\in H$, $\psi=v+i\omega$, $\tilde\psi=\tilde v+i\tilde\omega$ имеем:

$$\left|\int_\Omega\left(v\omega_{x_1}-\tilde v\tilde\omega_{x_1}\right)B_1\,dx\right|\le\int_\Omega\left|\left(v-\tilde v\right)v_{x_1}B_1\right|dx+\int_\Omega\left|\tilde v\left(\omega_{x_1}-\tilde\omega_{x_1}\right)v_{x_1}B_1\right|dx;$$

$$\int_\Omega\left|\left(v-\tilde v\right)v_{x_1}B_1\right|dx\le\left\|v-\tilde v\right\|_{L_6(\Omega)}\left\|v_{x_1}B_1\right\|_{L_{6/5}(\Omega)}\le C\left\|v-\tilde v\right\|_{W_2^1(\Omega)}\left\|v_{x_1}\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|B_1\right\|_{L_3(\Omega)};$$

$$\int_\Omega\left|\tilde v\left(\omega_{x_1}-\tilde\omega_{x_1}\right)B_1\right|dx\le\left\|\omega_{x_1}-\tilde\omega_{x_1}\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\tilde v B_1\right\|_{L_2(\Omega)}\le\left\|\omega-\tilde\omega\right\|_{W_2^1(\Omega)}\left\|\tilde v\right\|_{L_4(\Omega)}\left\|B_1\right\|_{L_4(\Omega)},$$

где C – норма оператора вложения j из $W_2^1(\Omega)$ в $L_6(\Omega)$.

Следовательно, оператор $T: H\to H$, определяемый равенством

$$\left\langle T(u), v\right\rangle_H=\int_\Omega\left(i\psi^*\nabla\psi-i\psi\nabla\psi^*, B\right)dx$$

для $u=(\psi,A)$, $v=(\varphi,B)\in H$, является равномерно непрерывным на ограниченных множествах пространства H.

Из компактности и равномерной непрерывности на ограниченных множествах оператора $\nabla g:H\to H$ вытекает, что оператор ∇g усиленно непрерывный (теорема 7.2 в [7, с. 86]), т.е. из слабой сходимости последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}\subset H$ к $u_0\in H$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\nabla g(u_n)-\nabla g(u_0)\right\|_H=0.$$

Отметим, что в [5] усиленная непрерывность оператора ∇g не обосновывается.

На самом деле, при построении ПИМ для отыскания приближений к нетривиальным решениям уравнений Гинзбурга – Ландау усиленную непрерывность оператора ∇g можно не использовать при использовании равномерной непрерывности на ограниченных множествах оператора $\nabla f:H\to H$, вытекающей из равномерной непрерывности на ограниченных множествах оператора $\nabla g:H\to H$.

Таким образом, обоснована возможность отыскания критических точек функционала f в пространстве H с использованием аналога ПИМ части 6.6 в [5], ибо результаты исследования уравнений Гинзбурга – Ландау в [1] и равномерная непрерывность на ограниченных множествах оператора $\nabla f:H\to H$ позволяют использовать аналог ПИМ части 6.6 в [5] для отыскания нетривиальных решений уравнения $\nabla f(u)=0$ $(u\in H)$, являющихся критическими точками функционала f на H.

2. Проекционный итерационный метод

Пусть $\{H_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$ – такие последовательности подпространств (замкнутых) пространства H и операторов ортогонального проектирования P_i пространства H на H_i $(i\geq 1)$, что выполняются следующие условия:

1) $H_i\subseteq H_{i+1}$ для каждого $i\geq 1$;

2) $P_i u\to u$ при $i\to\infty$ для каждого $u\in H$;

3) H_1 состоит из элементов $(\psi,0)\in H$ с функциями ψ, равными константам.

Зафиксируем произвольные числа

$$q_0\in(0,1);\quad q\in(0,q_0);\quad b>0;\quad \theta\in(0,1].$$

Предположим, что $\lambda>0$.

Рассмотрим последовательность $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ ПИМ

$$u_{i+1}=u_i-t_i w_i\quad (i\geq 1) \tag{9}$$

с таким начальным элементом $u_1\in H_1$, что $f(u_1)<0$, где при

$$h_i\equiv P_{i+1}\nabla f(u_i)\neq 0$$

имеем:

$$t_i\in[\theta\tau_i,\tau_i];$$

$$\tau_i=\sup_{\tau\in(0,b]}\left\{\left\langle P_{i+1}\nabla f(u_i-sw_i),w_i\right\rangle_H\geq q\left\|h_i\right\|_H,\ \forall s\in(0,\tau)\right\};$$

$$w_i\in H_{i+1},\quad \left\langle h_i,w_i\right\rangle_H\geq q_0\left\|h_i\right\|_H,$$

а при $h_i=0$ имеем $t_i=0$, $w_i=0$.

В силу выбора элементов w_i и множителей t_i $(i \geq 1)$ в (9) ПИМ (9) является градиентным методом (методом типа метода наискорейшего спуска). И ПИМ (9) сочетает в себе проекционный метод и итерационный процесс, ибо элементы последовательности $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ ПИМ (9) принадлежат подпространствам пространства H.

Справедливы следующие лемма и теорема, являющиеся аналогами леммы 6.7 и теоремы 6.12 в [5] и доказываемые так же, как лемма 6.7 и теорема 6.12 в [5].

Лемма. Для последовательности $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ ПИМ (9) имеем:

1) $f(u_i) \geq f(u_{i+1})$ для всех $i \geq 1$;

2) последовательность $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ ограничена в H;

3) ряд $\sum_{i=1}^{\infty} t_i \|h_i\|_H$ сходится;

4) $\|h_i\|_H \to 0$ при $i \to \infty$;

5) последовательность $\{\nabla f(u_i)\}_{i=1}^{\infty}$ слабо сходится к нулю в H;

6) $\langle \nabla f(u_i), u_i - u \rangle_H \to 0$ при $i \to \infty$ для каждого $u \in H$.

Теорема. Последовательность $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ ПИМ (9) компактна, частичные пределы последовательности $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ принадлежат множеству $K = \{u \in H : \nabla f(u) = 0,\ f(u) \leq f(u_1)\}$ и

$$\lim_{i \to \infty} \{\inf_{u \in K} \|u_i - u\|_H\} = 0. \qquad (10)$$

Заключение 1 леммы означает, что последовательность $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ ПИМ (9) релаксационная [7, с. 155]. Поэтому множители t_i $(i \geq 1)$ в (9) можно назвать, следуя терминологии в [7], релаксационными множителями.

В силу (10) последовательность $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ ПИМ (9) сходится к замкнутому множеству K нетривиальных критических точек функционала f, рассматриваемого на пространстве H. Множество K является замкнутым множеством нетривиальных обобщённых решений краевой задачи (1)–(4) для уравнений Гинзбурга – Ландау.

Заключение

Автором предложен проекционный итерационный метод, сочетающий в себе проекционный метод и итерационный процесс, для отыскания приближений к замкнутому множеству нетривиальных обобщённых решений краевой задачи для уравнений Гинзбурга – Ландау феноменологической теории сверхпроводимости. Обобщённые решения краевой задачи для уравнений Гинзбурга – Ландау являются критическими точками функционала свободной энергии сверхпроводника.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бобылев Н.А., Емельянов С.В., Коровин С.К.** Геометрические методы в вариационных задачах. - М.: Изд-во Магистр, 1998.

2. **Одех Ф.** Задача о бифуркации в теории сверхпроводимости // Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения / под ред. Дж. Б. Келлера и С. Антмана. - М.: Мир, 1974. - С. 63-70.

3. **Саунина С.С., Лексин А.Ю., Прохоров А.В.** Автоматизация исследования солитонных решений диссипативного уравнения Гинзбурга – Ландау с использованием параллельных вычислений // Високопродуктивні обчислення: міжнародна конференція HPC-UA'2012 (Україна, Київ, 8-10 жовтня 2012 року). - С. 300-304. [Электронный ресурс]. URL: http://hpc-ua.org/hpc-ua-12/files/proceedings/60.pdf.

4. **Безотосный П.И., Лыков А.Н., Цветков А.Ю.** Численное решение уравнений Гинзбурга – Ландау для сверхпроводящих пластин с использованием различных граничных условий // Научный Вестник СПбГУ ИТМО. - 2008. - № 13 (58). - С. 42-46.
5. **Фонарёв А.А.** Проекционные итерационные методы решения уравнений и вариационных неравенств с нелинейными операторами теории монотонных операторов: монография. - М.: ИНФРА-М, 2014.
6. **Треногин В.А.** Функциональный анализ. - М.: Наука, 1980.
7. **Вайнберг М.М.** Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. - М.: Наука, 1972.

ABOUT SOME APPROXIMATIONS TO THE CLOSED SET OF NOT TRIVIAL SOLUTIONS OF THE EQUATIONS OF GINZBURG – LANDAU

Fonarev A.A.

Possibility of use of a projective iterative method for search of approximations to the closed set of not trivial generalised solutions of a boundary value problem for Ginzburg – Landau's equations of the phenomenological theory of superconduction is investigated. The projective iterative method combines a projective method and iterative process. The generalised solutions of a boundary value problem for Ginzburg – Landau's equations are critical points of a functional of a superconductor free energy.

Key words: projective iterative method, Ginzburg-Landau’s equations, solutions.

Сведения об авторе

Фонарёв Анатолий Афанасьевич, 1942 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (1972), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики МФТИ, автор 127 научных работ, область научных интересов – нелинейные уравнения в нормированных пространствах, приближенные методы нелинейного функционального анализа, решение нелинейных эллиптических краевых задач.